2)a- $\boxtimes \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-x\text{Log}x}{1+x^2} = \dfrac{0}{1} = 0 = f(0)$

$\Rightarrow$ f est continue à droite en 0.

$\boxplus \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{-\text{Log}x}{1+x^2} = +\infty$

f n'est pas dérivable à droite en 0.

b- $\forall x \in]0,1[;\ f'(x) = -\dfrac{\left(\text{Log}x + x\frac{1}{x}\right)(1+x^2) - 2x(x\text{Log}x)}{(1+x^2)^2}$

$= -\dfrac{(\text{Log}x+1)(1+x^2) - 2x^2\text{Log}x}{(1+x^2)^2}$

$= \dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\left(\text{Log}x + \dfrac{1+x^2}{1-x^2}\right) = \dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\varphi(x).$

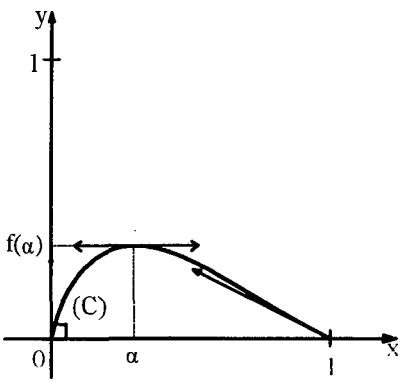
c- $\forall x \in]0,1[;\ f'(x) = \dfrac{x^2-1}{(1+x^2)^2}\varphi(x)$

$\Rightarrow \forall x \in]0,1[;\ \text{sig}[f'(x)] = -\text{sig}[\varphi(x)]$ car $\forall x \in]0,1[; x^2-1<0$

D'où le tableau de variation de f

x	0		α		1
f'(x)	‖	+	0	−	
f (x)	‖ 0	↗	$f(\alpha)$	↘	0

• $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty \Rightarrow$ la courbe de f possède une demi-tangente verticale en son point O(0, 0).



II-1)a- Pour tout $n \geq 1$ on a :